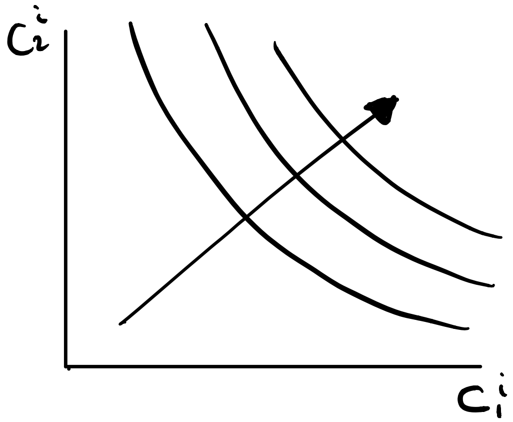
Capítulo 4: modelo de intercambio intertemporal:

- Simplificación: • No hay empresas
  • No hay producción
- Única actividad: • intercambio de bienes
  • consumo
- individuos reciben cada periodo una dotación de bienes
- Individuos viven varios periodos.
- Hay un único bien
- Intercambio: de caracter intertemporal. Individuos adquieren o venden el bien en el presente a cambio de dar o recibir bienes en el futuro.

Modelo de 2 periodos:

- Periodos $t = 1, 2$.
- I consumidores
- Dotaciones (y_1^i, y_2^i), $y_t^i \geq 0$
- Individuos conocen con certeza sus dotaciones futuras.
  ↳ modelo determinístico.
- Individuos difieren en sus dotacciones que pertenecen a $\mathbb{R}^2$
- Bien es perecedero: se debe consumir en el mismo periodo.
- Preferencias: $\underline{U_i}(c_1^i, c_2^i)$ → U evalúa planes de consumo durante toda la vida.
- U_i es: - monótona creciente
  - Cuasicóncava
  - continua + diferenciable.



curvas son convexas con respecto al origen:

individuos prefieren canastas de consumo "balanceadas":

$\boxed{\text{suavización del consumo.}}$

$$U_i(c_1^i, c_2^i) = \underbrace{u_i(c_1^i)}_{\substack{\text{utilidad}\\ \text{inmediata}\\ \text{del consumo}}} + \underbrace{\beta}_{\substack{\text{factor de}\\ \text{descuento.}}} u_i(c_2^i) \longrightarrow \text{aditiva y separable.}$$

u_i : monótona creciente y cóncava.

$0 < \beta < 1$: utilidad futura es "descontada" a una tasa β.

Es decir, individuos son impacientes.

$\beta = \frac{1}{1+\rho}$, $\rho > 0$. ρ = "tasa de descuento"

β = "factor de descuento".

Tasa marginal de sustitución: $TMS = \dfrac{\partial U_i / \partial c_1}{\partial U_i / c_2} = \dfrac{u_i'(c_1^i)}{\beta u_i'(c_2^i)}$

<u>Ej:</u> $u_i(c) = \ln c \longrightarrow$ cobb Douglas $U_i(c_1, c_2) = \ln c_1 + \boxed{\beta} \ln c_2$

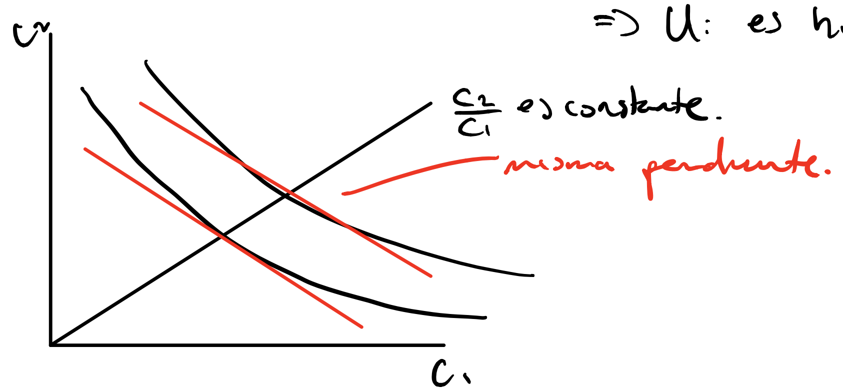
$$TMS = \frac{1}{\beta}\left(\frac{c_2}{c_1}\right) = (1+\rho)\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

$u_i(c) = \dfrac{c^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}}$, $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$, σ : elasticidad de sustitución intertemporal

$$TMS = \frac{1}{\beta}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = (1+\rho)\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Para Cobb-Douglas y CES, TMS depende del ratio c_2/c_1

$\Rightarrow$ U: es homotética.



Intercambio: bienes presentes vs bienes futuros.

- se da mediante una promesa de dar/recibir un bien en el futuro a cambio de un bien en el presente
- las promesas se cumplen.

Restricciones presupuestarias:

$$c_1^i + b^i = y_1^i \quad , \quad c_2^i = y_2^i + (1+r)b^i$$

b_i puede ser negativo.

b^i: unidades del bien que el individuo ahorra/presta/cede en $t=1$ a cambio de recibir $(1+r)b^i$ en $t=2$.

b^i: "bonos" que el individuo adquiere para recibir bienes en el futuro.

- $b_i > 0$: $y_1^i > c_1^i$: individuo es ahorrador
  $y_2^i < c_2^i$

- $b_i < 0$: $y_1^i < c_1^i$: individuo es deudor
  $y_2^i > c_2^i$

Individuo siempre puede escoger $b^i = 0 \rightarrow$ "autarquía".

r: tasa de interés real. Individuo la toma como dada y es un objeto de equilibrio.

Puede ser negativa o positiva, dependiendo de:

- la impaciencia de los hogares β
- la abundancia relativa del bien hoy vs mañana.

Las restricciones las podemos escribir en términos de bonos "cupón cero" que se adquieren a un "precio de descuento":

$$c_1^i + q\tilde{b}^i = y_1^i \quad , \quad c_2^i = y_2^i + \tilde{b}_i \longrightarrow q\tilde{b}_i \text{ es el ahorro}$$

$\tilde{b}_i$: son bonos "cupón cero" que dan derecho a una unidad de consumo mañana.

q: precio de descuento.

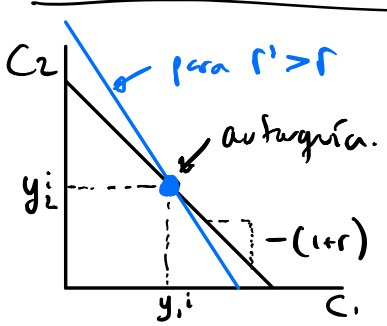
Comparando restricciones presupuestales: $\boxed{q = \frac{1}{1+r}}$ → $r>0,\ q<1$

Escribir el modelo en términos bonos o de bonos cupón cero es exactamente igual.

$$c_1^i + b^i = y_1^i \quad , \quad c_2^i = y_2^i + (1+r)\,b^i$$

$$b^i = y_1^i - c_1^i$$

$$\boxed{c_1^i + \frac{c_2^i}{1+r} = y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}} \longrightarrow \text{restricción presupuestaria intertemporal.}$$



$c_1 + \frac{c_2}{1+r}$ = consumo total en valor presente

$y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ = ingresos totales en valor presente = riqueza.

Problema del consumidor:

Nos deshicimos de la deuda.

$$\max_{c_1, c_2} \; u(c_1^i) + \beta u(c_2^i) \quad \text{s.a.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right)$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)}}_{\text{TMS}} = \underbrace{1+r}_{\text{precio del bien 1 con respecto al precio del bien 2.}}} \longrightarrow \text{condición de eficiencia intertemporal.}$$

$$\boxed{u'(c_1^i) = \beta(1+r)u'(c_2^i)} \longrightarrow \text{ecuación de Euler.}$$

$$\boxed{c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}} \longrightarrow \text{restricción intertemporal}$$

En caso cobb Douglas: $u_i(c) = \ln c$

$$c_1^{i*} = \frac{1}{1+\beta}\underbrace{\left(y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}\right)}_{\text{riqueza del individuo}}, \quad c_2^{i*} = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\underbrace{\left(y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}\right)}_{\text{riqueza.}}$$

La deuda del individuo / cantidad de bonos:

$$b^{i*} = y_1^i - c_1^{i*} \Rightarrow b^{i*} = y_1^i - \frac{1}{1+\beta}\left(y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}\right)$$

Equilibrio: • Hay I individuos
• r^* es la tasa de intrés que vacía los mercados:
- bienes y servicios
- ahorro/crédito.

Mdo de bienes: $\sum_{i=1}^{I} c_1^i(r^*) = \sum_{i=1}^{I} y_1^i$

$$\sum_{i=1}^{I} c_2^i(r^*) = \sum_{i=1}^{I} y_2^i$$

mercado de bonos: $\boxed{\sum_{i=1}^{I} b^{i*} = 0}$

si $b_i > 0$ para algún i $\Rightarrow$ $b_j < 0$ para algún j

Agente representativo: todos los individuos son idénticos.
En equilibrio $b^{i*} = 0$ para todo i.
$c_1^{i*} = y_1^i$, $c_2^{i*} = y_2^i$

Tasa de interés de equilibrio: $\frac{u'(c_1^*)}{\beta u'(c_2^*)} = 1+r^*$

$\Rightarrow$ $\boxed{1+r^* = \frac{u'(y_1^i)}{\beta u'(y_2^i)}}$ En Cobb-Douglas: $\boxed{1+r^* = \frac{y_2^i}{\beta y_1^i}}$

Qué ocurre con r^* si y cambia?
Supongamos que y_1^i aumenta. $\Rightarrow$ $r^* \downarrow$

y_1^i aumenta. $\Rightarrow$ individuo va a querer consumir más en $t=1$ y en $t=2$. La única manera de consumir más en $t=2$ es ahorrando o comprando bonos (porque y_2^i no han cambiado).

$\Rightarrow$ la única manera de restablecer el equilibrio es si r^* baja.

Modelo con T periodos:

- Individuos viven $T \geq 2$ periodos.
- Dotaciones: $y_1^i, y_2^i, y_3^i, \dots, y_T^i$, $y_t^i \geq 0$
- Individuos escogen plan de consumo $c_1^i, \dots, c_T^i$ óptimo.
- Preferencias: $\underline{U_i}(c_1^i, \dots, c_T^i) = u_i(c_1^i) + \beta u_i(c_2^i) + \dots + \beta^{T-1} u_i(c_T^i)$

$$= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u_i(c_t^{i*})$$

- Cada periodo el individuo puede comprar bonos b_t^i.
- Restricción presupuestal: $\boxed{c_t^i + b_t^i = y_t^i + (1+r_{t-1})\, b_{t-1}}$

$\hookrightarrow$ restricción presupuestal.

- r_{t-1}: tasa de interés pactada en el momento en el que el individuo adquirió la deuda.

- r_t: determina el precio relativo del bien en dos periodos contiguos.

Problema del consumidor:

$$\max_{c_1,\dots,c_T,b_1,\dots,b_T} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t^i) \quad \text{s.a.}$$

$$c_1^i + b_1^i = y_1^i + (1+r_0)\, b_0 \longrightarrow \text{asumimos } b_0 = 0.$$

$$c_2^i + b_2^i = y_2^i + (1+r_1)\, b_1$$

$$\vdots$$

$$c_T^i + \boxed{b_T^i} = y_T^i + (1+r_{T-1})\, b_{T-1}$$

$$\boxed{b_T^i \geq 0}$$ — Sin esta restricción, problema no está bien definido.

En óptimo $b_T^i = 0$

Problema:

$$\max \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t^i) \quad \text{s.a.} \quad c_t^i + b_t^i = y_t^i + (1+r_{t-1})\, b_{t-1}^i, \quad t=1,\dots,T$$
$$b_0 = 0, \quad b_T = 0$$

Supongamos que el individuo quiere financiar 1 unidad de consumo en $t=1$ con recursos de $t=\tau > 2$.

- Pide prestado 1 unidad en $t=1$ ($b_1^i = -1$).
- En $t=2$ debe $(1+r_1)\cdot 1$. $\Rightarrow$ Pide prestado $b_2^i = -(1+r_1)$
- En $t=3$ debe $(1+r_2)\cdot(1+r_1)\cdot 1 \Rightarrow$ Pide prestado $b_3^i = -(1+r_1)(1+r_2)$

$$\vdots$$

- En $t=\tau$ paga $(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{\tau-1})$ — rollover de la deuda.

$$\boxed{1+\bar{r}_{1,t-1} = \left((1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{t-1})\right)^{\frac{1}{t-1}}}$$ — $\bar{r}_{1,t-1}$: tasa de interés promedio entre 1 y $t-1$.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u_i(c_t) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left(y_t^i + (1+r_{t-1}) b_{t-1}^i - c_t^i - b_t^i \right)$$

$[c_t]$: $\beta^{t-1} u'(c_t) - \lambda_t = 0 \longrightarrow T$ eqs.

$[b_t]$: $\lambda_t - (1+r_t)\lambda_{t+1} = 0 \longrightarrow T-1$ eqs

$[\lambda_t]$: $c_t^i + b_t^i = y_t^i + (1+r_{t-1}) b_{t-1}^i \longrightarrow T$ eqs

$3T - 1$ eqs.

Eliminemos b_t^i del problema:

En $t = T$: $c_T = y_T + (1+r_{T-1}) b_{T-1} \longrightarrow$ porque $b_T = 0$.

$$b_{T-1} = \frac{1}{1+r_{T-1}} (c_T - y_T)$$

En $t = T-1$: $c_{T-1} + b_{T-1} = y_{T-1} + (1+r_{T-2}) b_{T-2}$

$$c_{T-1} + \frac{1}{1+r_{T-1}} (c_T - y_T) = y_{T-1} + (1+r_{T-2}) b_{T-2}$$

$$b_{T-2} = \frac{1}{1+r_{T-2}} (c_{T-1} - y_{T-1}) + \frac{1}{(1+r_{T-1})(1+r_{T-2})} (c_T - y_T)$$

$\vdots$

$$\boxed{\begin{aligned} &c_1 + \frac{1}{1+r_1} c_2 + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} c_3 + \cdots + \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} c_T \\ &= y_1 + \frac{1}{1+r_1} y_2 + \cdots + \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} y_T \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ restricción presupuestal intertemporal.

consumo total en valor presente = ingreso total en valor presente / riqueza.

= valor presente de mercado de las dotacciones.

$$P_t := \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}, \quad P_1 = 1$$ — P_t es el precio del consumo en t en términos del consumo en $t=1$.

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} P_t c_t^i = \sum_{t=1}^{T} P_t y_t^i$$

Problema del consumidor:

$$\max \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{t=1}^{T} P_t c_t = \sum_{t=1}^{T} P_t y_t$$

↳ problema es equivalente con solamente 1 restricción.

Caso Cobb-Douglas:

$$c_t^*(r_1, r_2, \ldots, r_{t-1}) = \frac{\beta^{t-1}(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}{1+\beta+\beta^2+\cdots\beta^{t-1}} \underbrace{\left[\sum_{t=1}^{T} P_t y_t^i\right]}_{\text{riqueza.}}$$